

部品の段階的拡張手法を活用した中学数学の関数分野における解法の構造理解と再利用を促す学習支援システムの設計・開発

Design and Development of a Learning Support System for Structural Understanding and Reuse of Solutions in Functions of Junior High School Mathematics with BROCs

内山 裕太¹ 白髭 虹輝¹ 古池 謙人^{1,2} 東本 崇仁¹

Yuta Uchiyama¹, Koki Shirahige¹, Kento Koike^{1,2}, and Takahito Tomoto¹

¹ 千葉工業大学

¹ Chiba Institute of Technology

² 東京理科大学

² Tokyo University of Science

Abstract: In this study, we propose a learning method that promotes structural understanding and reuse of solutions in mathematics learning. Based on this method, we develop a learning support system that facilitates the acquisition and application of mathematical knowledge. The system applies the *Building method that Realizes Organizing Components (BROCs)*—originally used in programming—to mathematics, enabling learners to acquire and organize knowledge incrementally. Additionally, the system incorporates abstraction mechanisms that allow learned components to be reused across different problems. By repeatedly reusing these components, learners develop a deeper understanding of mathematical structures and solutions.

1 はじめに

数学において、複数の手順を内包する問題が存在する。例えば「 xy 平面上にある三角形の面積を求めよ」という問題が提示された場合を考える。この問題の場合「三角形の底辺を求める」、「三角形の高さを求める」、「底辺と高さを用いて面積を求める」という手順に分けることができる。しかし、これらの手順を十分に理解できていない学習者の場合、わからない問題に対して「模範解答に書かれている数値などを写す」だけで学習を終えてしまうことがある。その結果、解法としての知識が定着せずに学習を終えてしまうことになる。

解法としての知識が定着していないと、学習者は数値や式だけが異なるような類題に対応することができない。そのような学習者は、実際の定期試験や入試などの場面で解答することができなくなってしまう。そのため、解答がどのような手順で導かれているのかを理解することが重要である。

また、数学学習における問題の解法は、全てが独立しているわけではない。例えば「 xy 座標上の2直

線の交点を求めよ」、「2つの2元1次方程式を連立方程式として解け」という2つの問題の場合、「2つの方程式を連立方程式として解く」といった共通点が考えられる。このような共通点を学習者が認知することで、問題の類似性に気付くことができる。問題の類似性に気付くことで、初見の問題に対しても「既存の知識で解く方法」を着想する確度が高まる。

そのため、学習者が解法の構造を理解し、解法の類似性に気付けるようになるための支援をすることは重要である。

そこで本研究では、プログラミング学習を対象とした研究[1]で提案された“部品の段階的拡張手法”を数学学習に援用する。問題を解くための各手順を“部品”として獲得し、他の問題で再利用することで知識の定着を促す学習手法の提案と、その支援システムの設計・開発を行った。

2 対象とする数学学習の問題点

本研究では、数学学習の中での2つの問題点を対象としている。1つは「学習者が解法の構造を理解で

きていない点」, もう1つは「解法の再利用を行えていない点」である. それぞれについて詳しく説明する.

2.1 解法の構造を理解できていない点

数学学習の中で, 解法の構造を理解することは重要である. 解法の構造について, 1章で示した三角形の面積を求める問題を例とした場合の解法の構造を以下に示す.

1. 「三角形の面積」を求めるために「底辺」, 「高さ」を求める.
2. 「底辺」を求めるために「底辺の両端の座標」をそれぞれ求め, 点と点の距離を求める.
3. 「高さ」を求めるために「底辺と底辺に含まれない頂点の距離」を求める.

解法の構造とは, 求めたい値とその値を求めるために必要な要素の関係のことである. このような解法の構造を理解できていない学習者が一定数存在する. そのような学習者は, 複数のステップを含んでいる問題に対して, 個々のステップに分けて考えることができない可能性が高い. 個々のステップとして考えられないと, 正しい解答を導くために必要な要素を取得できず, 正しい解答を導くことが難しくなる. 学習者が問題に含まれる個々のステップを認識するためには, 複数のステップが含まれる問題を個々のステップに分ける練習をする必要がある.

また, 個々のステップとして認識することができない学習者が分からない問題に直面したとき, 模範解答を写すだけで学習を終えることがある. 学習者は, 模範解答を確認することで, 自身の解答に間違いがあることは認識しうる. しかし, 学習者が解答を導くための手順を理解していない場合, 「自身の解答と模範解答が違うこと」には気付いても, 「誤りの原因」を理解することは難しい. 学習者が解いている問題の解法の構造を理解することで, 解答が導かれる手順を理解することができる. そして, 解法の構造を理解した学習者は, 模範解答に書かれている解答を知識として獲得することができる. また, 数値や表現が変わっただけの問題に対応することも可能になる.

2.2 解法を再利用することの重要性

1章で各問題の解答が独立しているわけではない点について示したが, 問題間の共通点を理解するためには解法を再利用することが重要である. 例えば, 「Aさんは200円, Bさんは150円持っているとき, 2人の所持金の合計を求めよ。」という問題を解ける

学習者が「Aさんの身長は160cmから3cm伸びました. 現在の身長を求めよ。」という問題を解けないとは考えづらい. 数値や表現の異なる問題だが, 「2つの値を足し算する」という共通点を有するためである. つまり, 学習者が「与えられた2つの値を足す」という計算を知識として獲得していれば, 表現や数値が異なっても, 同じ計算を要する問題を解くことができる. そのため, 獲得済みの知識を他の問題で用いることは重要であり, 繰り返し用いることで知識の定着がより深くなると考えられる.

3 先行研究

3.1 部品の段階的拡張手法

古池ら⁽¹⁾は, プログラミング学習におけるソースコードの構造理解を促すための学習手法を提案した. プログラム中のソースコードの一部を“部品”として獲得し, 知識として定着する手法である. また, 獲得した部品を用いてより大きな部品を構築する段階を“部品の段階的拡張手法”と定義した(図1). 学習者が獲得した部品の再利用を繰り返すことで, 部品としての知識が定着する.

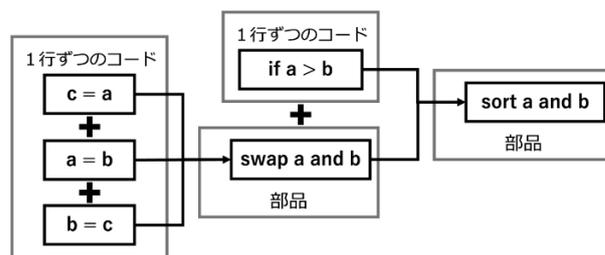


図1: 部品の段階的拡張手法

3.2 抽象化の必要性

数学における問題は複雑な手順を含んでいる場合がある. 問題に含まれる手順の一部を一つの部品として獲得し, 他の問題で使用することができるため, 数学分野でも部品としての考え方をを用いることができる. しかし, プログラミングと数学で異なる点として「表現の抽象度」が挙げられる.

プログラミングでは, ある関数に対して与える引数を変えるだけで異なる結果を得ることができる. 同じような処理を要求する場合, データ型が同じであれば, 異なる表現などを含むような問題でも同じ関数を繰り返し用いることができる. しかし, 数学では2.2節で説明したような問題の場合, 数値や表現が異なるだけで全く別の問題のように捉えられてしまう場合がある. 各問題に含まれる数値や表現を

そのままの状態部品にしてしまうと、数値や表現が異なる問題で再利用することが難しくなってしまう可能性が考えられる。そのため、本研究では部品の段階的拡張手法を数学の分野に転用する中で、「部品の抽象化」を取り入れる。

4 提案手法

本研究では、学習者が解法に含まれる手順を理解・再利用可能になることを目指し、問題の解法に含まれる手順の一部を他の問題に応用する学習手法を提案する。具体的には、問題の解法に含まれる手順の一部を部品として獲得し、その部品を他の問題にも利用できる形に抽象化する。そして、抽象化した部品を他の問題で再利用することで、問題固有の理解から、部品としての知識定着を図る学習手法である。

4.1 部品の構築

解法に含まれる手順とは、どのような方法を用いて求めるかの選択や、何を求めるのか確認することである。学習者が「公式と公式を使うために必要な値」、「公式によって求められる値」を理解することで、解法を理解できるようになる。学習者が解法に含まれる手順を理解するためには、あらかじめ公式などを知識として理解している必要がある。しかし、公式などを覚えるだけでは、実際の問題にうまく用いられない場合や、問題が少し異なるだけで「この公式は使えない」と考えてしまうことがある。そこで、本提案手法における部品の構築では「入力要素」、「操作」、「出力要素」のセットを1つの部品とする。入力要素とは数値や数式のことであり、解の導出過程や問題文から得られる数値や数式が該当する。操作とは、実際に入力要素に加える処理のことである。例えば「連立方程式として解く」、「2点を通る直線の式を求める」などである。出力要素は入力要素と同様に、数値や数式のことである。入力要素に操作を加えることで得られるものが該当する。部品を1つの公式のように見立て、学習者自身に「どの数値や式」を用いて、「何を求めるのか」を考えさせる。また、実際に行う操作を考えさせることで、別の問題を解く際に「操作が同じだから部品を使えるはず」と考え、解法を他の問題に応用できるようになる。そのため、部品の構成要素を上記の3つにしている。

部品の構築の具体例を示す。例えば「点 A(2,4)、点 B(-1,-2)の2点を通る直線の式を求めよ」という問題を考える。この問題の場合、学習者は「点 A(2,4)」、「点 B(-1,-2)」を入力要素として、出力要素の「直線 $y = 2x$ 」を求める。その際に「2点を通る直線の式を

求める」という操作を用いて部品を構築する(図2)。本研究では「入力要素」、「操作」、「出力要素」のセットを作成しながら、解を導出する過程を「構造化」と呼んでいる。実際に構築した部品や、問題から得られる要素などを用いて構造化を行う。

4.2 部品の抽象化

図2のような部品では、具体的な数値や式の情報が含まれており、問題依存であることから他の問題で応用することが難しい。他の問題で応用できるようにするためには、各要素を問題ごとに変更できるようにする必要がある。そのため、具体的な数値や式を抽象的な表現に変更し、学習者が操作を中心に部品の再利用性を考えられるようにする必要がある。そこで、部品に含まれる要素の抽象化が必要になる。

例えば、図2における「点 A(2,4)」という入力要素は「点の座標」に抽象化することができる。同様に「直線 $y = 2x$ 」という表現も「直線の式」に抽象化することができる(図3)。このように、構築された部品を抽象化することで、学習者が他の問題での応用を考えやすい状態にする。そうすることで、修得済みの部品が他の問題で使用できるようになり、2.2で示した問題点を改善できると考える。

通常では、解法を抽象化したものを公式として学習するが、学習者は覚える作業のみであるため、知識として定着しづらい問題点がある。学習者自身が部品を抽象化することで、公式がどのような構造でできており、どのようにして成り立っているのかを理解することができる。そのため、既存の学習に比べて知識として定着しやすいと考えられる。

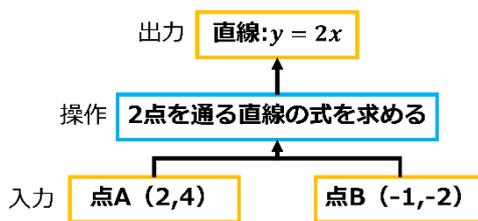


図2: 本研究における部品の例

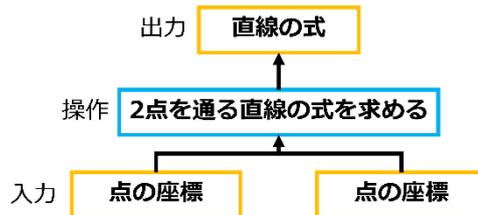


図3: 図2を抽象化した部品

4.3 部品の再利用

学習者は、抽象化まで終えた部品を実際に獲得し、次の問題の解答へ進む。次以降の問題では、獲得済みの部品を利用して解答を進めていく。学習者が獲得済みの部品の再利用を繰り返すことで、部品に対する理解を深め、知識として定着させることができる。また、どの部品が使用できるかを学習者自身が考えることで、問題間の類似性を能動的に考えるようになる。部品としての理解が深まる中で「この問題にも獲得済みの部品が使えるかもしれない」という気づきが生まれる。このような気づきから、初見の問題などに対して「既存の知識で解けるかもしれない」と考えられるようになることが期待される。

5 提案システム

本システムでは大きく分けて、「解法の構造化」、「作成した構造の抽象化」、「抽象化した構造の再利用」の3つの工程で構成されている。各工程を繰り返す中で、部品の獲得・再利用を行う。システム画面の構成と各工程の流れと操作について詳しく説明する。

5.1 システム画面構成

本システムの画面は図4のようになっている。画面左上には、学習者が実際に解答する問題が表示される。また、本システムの対象は関数分野であるため、問題に応じたグラフが右側に表示されるようになっている。問題が表示されているすぐ下には、学習者が構造化を行うためのスペース（以下、構造化エリア）が用意されている。画面右下には、要素や操作、獲得済みの部品一覧が表示されている。学習者が、構造化エリアと画面右下のボタン各種を操作することで学習が進んでいく。

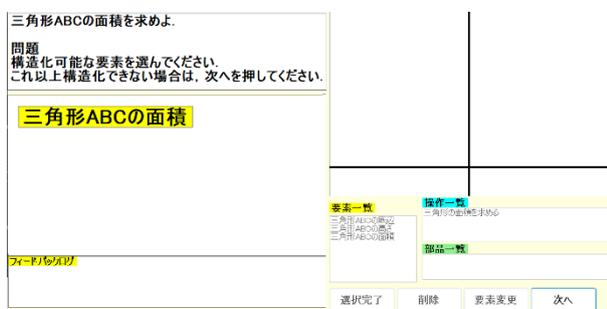


図4: 本システムの画面構成

5.2 システムの流れ

5.2.1 問題のサイクル

本システムでは、「部品を獲得する問題」、「部品を再利用する問題」が順番に出題される。学習者が部品を獲得した直後に再利用することで、部品としての理解を深めるためである。また、部品を再利用する問題については、直前に獲得した部品を用いるとは限らず、獲得済みの部品が使用できる問題を不規則に出題する。直前に獲得した部品を用いるだけでは、直前の構造を覚えているかを問うだけになってしまう。学習者がどの部品を用いるべきなのかを考えることで、問題に応じた適切な部品を使用できるようになると考えられる。

5.2.2 部品を獲得する問題

部品を獲得する問題では、獲得済みの部品のみで解答することができない問題が出題される。問題の中には、獲得済みの部品を組み合わせる新たな部品を構築する場合がある。そのため、学習者は獲得済みの部品を必要に応じて用いながら構造化を行う。

システムが始まると、構造化エリアに一つのラベルが生成される。このラベルは、解答中の問題で求める要素を表している。学習者がその要素を選択すると、画面右下の操作一覧が選択できる状態になる。学習者が必要だと考える操作や部品を選択することで、選択した操作や部品が構造化エリアに出力される。操作が選択された場合、要素一覧が選択できるようになる。学習者が必要だと考える要素を任意の数だけ選択すると、選択された要素が構造化エリアに出力される。その後、学習者が選択した操作と要素が矢印で接続され、一つの構造が完成する。

実際の問題を用いた具体例を示す。「底辺が4cm、高さが6cmの三角形ABCの面積を求めよ」という問題の場合、最初に表示されているラベルには「三角形ABCの面積」が入っている。次に、面積を求めるために必要な操作を選択する。操作はあらかじめシステムに数種類用意されており、今回は「三角形の面積を求める」を選択する。最後に操作に必要な要素を選択する。今回は「三角形ABCの底辺」、「三角形ABCの高さ」を要素として選択する。実際に選択を終え、構造化された状態が図5である。

構造化の中で獲得した部品については、抽象化を行ってから獲得する。実際に学習者が作成した構造の中には、具体的な数値や数式が含まれた状態となっている。4.3節で説明したような抽象化を行うために、あらかじめシステム側で抽象的な表現を用意し

ておき、学習者に任意のものを選択させることで、抽象化を行う。システムに用意されている表現としては「直線の式」、「点の座標」などがある。先述した問題の場合、「三角形ABCの底辺」は「三角形の底辺」、「三角形ABCの高さ」は「三角形の高さ」に抽象化される(図6)。そして「三角形の面積を求め」という部品を獲得することになる。

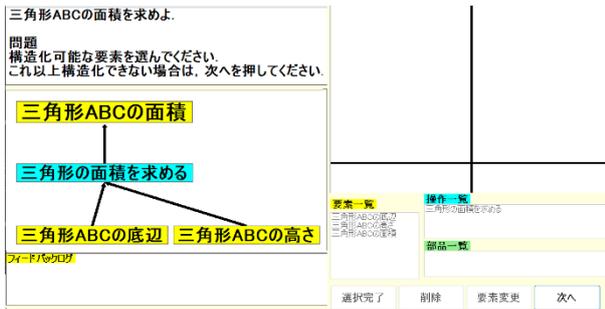


図 5: 実際の構造化例

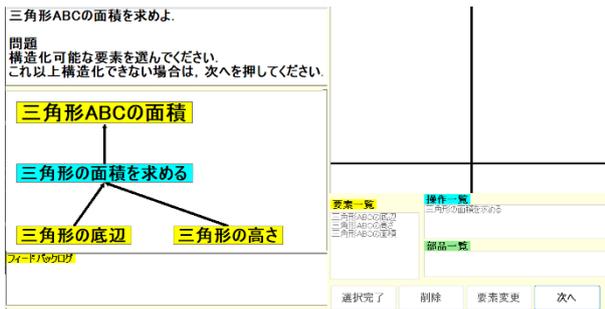


図 6: 図 5 を抽象化した例

5.2.3 部品を再利用する問題

2 問目以降の場合、学習者は獲得した部品を呼び出すことができる。5.2.2 項で操作一覧が選択できるようになると、同時に部品一覧が選択できるようになる。この時に、操作ではなく部品を選択すると、選択された部品に応じた構造がそのまま出力される。部品を選択した場合は、要素を選択する必要がないため、部品を選択すると同時に構造化が終了する。

例えば「原点を O とする xy 平面上にあり、底辺が OP となる三角形 OPQ の面積を求めよ」という問題の場合を考える。この問題の場合、最初に底辺と高さを求める必要がある。底辺と高さが求められたら、5.2.2 項で獲得した「三角形の面積を求め」という部品を用いることができる(図7)。

しかし、部品を呼び出しただけでは、表現が抽象化されているため使用することが難しい。そこで、部品の抽象化とは逆に、部品の具体化を行う。学習者は出力された部品の中から、具体化したい要素を

選択する。そして、具体化したい表現を要素一覧から選択する。そうすると、抽象的な表現となっている要素が、選択された要素の表現に変更される。学習者はこの具体化を行いながら部品の再利用を行う。

しかし、実際に部品を用いる場面であっても、部品を用いずに構造化ができてしまう。そのため、本システムでは学習者が部品を用いる問題で部品を使用しなかった場合「構造は正しいですが、部品を使用できません」とフィードバックを与える。そうすることで「構造自体は正解であること」、「部品を使用できること」を学習者に伝えることができる。

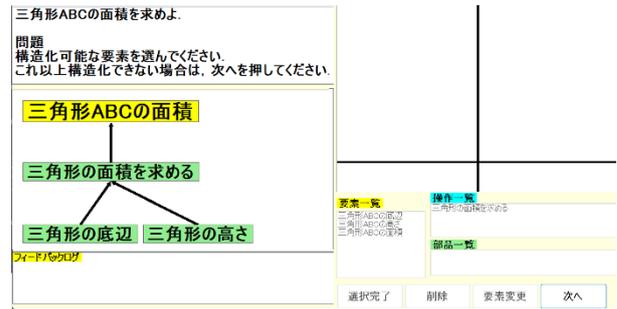


図 7: 部品の再利用

6 議論

6.1 本研究の支援範囲

6.1.1 要素の取得

本システムでは、システム側にあらかじめ要素や操作を用意している。また、あらかじめ用意された問題の中で、部品を用いることができる状態を意図的に作っている。しかし、実際に数学の問題を解く際には、学習者が持っているどの知識をどのタイミングで用いるのかはわからない。そのため、提示された問題文から学習者自身が要素を取得できるようになることが求められる。

本研究では、解法の構造化ができるようになるための支援を目的としている。構造化を行う上で、問題文から要素を読み取る能力は必須である。本システムでは、実際に学習者が構造化を行ったり、解法の再利用を行ったりする中で、解法を知識として定着させる。学習者に要素の取得を行わせることも可能であるが、その場合、十分に要素を取得できた学習者とそうでない学習者で、構造化スキルに差が出てしまうことが考えられる。そのため、問題文から要素を取得できるようになるための支援を別で行い、本システムに統合する必要があると考えている。

また、学習者によって苦手な分野は異なる。その

ため、今回のように分野を固定するのではなく、学習者が学習したい問題で構造化を行えるようにすることが望まれる。

6.1.2 学習者へ要求する知識

本提案システムは、数学の基礎知識を持つ学習者が利用する前提とした手法を用いている。また、学習者が行うのは構造化までであり、具体的な計算などを行わせていない。そのため、「考え方は理解しているが計算ができない」、「そもそも部品を構築することが困難である」といった学習者に対する学習効果が見込めない。そのため、数学の基礎知識を学習するための支援を同時に行う必要がある。しかし、数学の基礎知識を定着させるためには、別の支援が必要である。現代では、インターネットの普及により、どこでも映像授業が受けられるような支援も存在する。そのような支援の中で、学習者が解法を理解できるようにするための支援と組み合わせることが今後の課題になると考えている。

6.2 学習者別のフィードバック

実際の教育現場では、教師一人が複数人の生徒に指導することが一般的である。しかし、教師が生徒個々人の理解状況を完璧に把握することは難しく、授業のペースについていけないことがある。本システムでは、誤りに応じて「誤り箇所」や「どのような誤りか」を学習者に提示している。ただ、学習者が能動的に誤りに気づくことは、解法を理解する上で非常に重要である。そのため、学習者自身でどこが誤っているのかとできるようにした上で、学習者が苦手とする内容を重点的に学習させられるような支援が重要であると考えられる。

実際に物理を対象とした研究などで、学習者の誤りに応じた補助問題の自動生成などが行われている。数学学習でも、今回紹介した構造化の中での誤りに応じた補助問題の生成は可能であると考えている。また、補助問題に解答していく中で、学習した各単元がどのように繋がっているのかを理解することができる。各単元がどのように繋がっているかを理解することで、構造化の際に各構造がどのように繋がっているのかを理解することができる。その結果、より複雑な構造を持つ問題に対しても構造化が行えるようになると思われる。

6.3 他分野への転用

本提案手法は、様々な分野に転用することが可能

だと考えている。特に、解法の導出に構造的な考え方をを用いることができる分野や科目などである。例えば、歴史学習では人物や出来事の間には因果関係が存在する。ある時代における出来事と人物の因果関係を学習者が構造化し、作成された構造に基づいた流れを確認する。学習者の構造の中で「因果関係が矛盾している箇所」を見つけることで、能動的に構造の修正を行うことができる。科目や分野を問わず、順序や構造が関係するものであれば、本提案手法は転用できると考えている。

7 おわりに

本研究では、部品の段階的拡張手法を数学学習に転用し、部品の抽象化を取り入れた学習手法を提案した。また、提案手法による学習を促すための学習支援システム的设计・開発を行なった。問題の一部を部品として理解し、他の問題で再利用することで理解を深める手法は、学習者が解法の構造を理解することを促せると考えている。

今後の課題としては、実際の教育現場などで本システムを用いた実験を行うことや、本提案手法を他分野に転用することが挙げられる。また、実験を行う際は多くの被験者を用意して行うことで、学習者が持つ基礎知識などに依存せず、一定の学習効果が示唆できると考えている。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP22K12322, JP24K00454 の助成による。

参考文献

- [1] 古池謙人, 東本崇仁, 堀口知也, 平嶋宗: プログラミングの構造理解を指向した部品の段階的拡張手法の提案と支援システムの開発・評価, 教育システム情報学会誌, Vol. 36, No. 3, pp. 190-202, (2019)
- [2] 平嶋宗, 東正造, 柏原昭博, 豊田順一: 補助問題の定式化, 人工知能学会誌, Vol. 10, No. 3, pp. 413-420, (1995)
- [3] 平嶋宗: 学習課題の内容分析とそれに基づく学習支援システムの設計・開発: 算数を事例として, 教育システム情報学会誌, Vol. 30, No. 1, pp. 8-19 (2013)
- [4] 内山裕太, 古池謙人, 東本崇仁: 中学数学の関数分野における解法の構造理解と部品の知識の獲得・再利用を指向した学習支援システムの提案, 第 49 回教育システム情報学会全国大会講演論文集, pp. 215-216, (2024)