

問題構造に基づく構造の部分的再利用を指向した 学習支援システムの設計・提案

Proposal of a Learning Support System for Partial Reuse of Problem Structures

内山 裕太¹ 古池 謙人² 東本 崇仁³

Yuta UCHIYAMA¹, Kento KOIKE², and Takahito TOMOTO³

¹ 千葉工業大学大学院情報科学研究科

¹ Graduate School of Information and Computer Science, Chiba Institute of Technology

² 東京理科大学工学部

² Faculty of Engineering, Tokyo University of Science

³ 千葉工業大学情報変革科学部

³ Faculty of Innovative Information Science, Chiba Institute of Technology

Abstract: This study proposes a component-based learning method to foster structural thinking in mathematics. The method models learners' problem-solving as two processes: deriving a solution and acquiring or revising knowledge. Focusing on the latter, it enables learners to extract partial solution structures ("components") from problems, abstract them into generalized forms, and reuse them in new contexts. By explicitly presenting problem information and structural relationships, the method helps learners overcome procedural dependence and promotes the internalization of transferable mathematical structures.

1 はじめに

近年、AI 技術の発展や社会の高度情報化に伴い、個人が自ら課題を発見し、論理的に解決する能力が一層求められている。こうした能力の基盤となるのが、数理的思考であり、高等教育におけるデータサイエンス教育の拡充傾向にも示唆されるように、その涵養は学校教育における重要な課題となっている。

数理的思考の一つの側面として、構造的思考 (structural thinking) がある[1]。構造的思考とは、現象や状況に含まれる数量的関係を構造的に捉え、それを一般的な原理として抽象化することで活用し、新たな問題へと転用する思考である。しかし現状の数学教育においては、依然として与えられた数値や条件を手続的に処理することに重点が置かれ、問題の構造や関係性を理解する学習が十分に行われていないという課題がある。このような学習状況は、学習者が既有知識を新たな状況に転用することを困難にし、構造的思考の育成を妨げていると考えられる。

特に既有知識を新たな状況に転用することを妨げる一因として、解の導出に必要な解法構造 (解法インデックス (ISM: Index of Solution Method) [2]) とも

呼ばれる) の不理解が挙げられる。例えば、“ノート 1 冊と鉛筆 3 本を購入したら合計 220 円であった。鉛筆 1 本が 40 円の時、ノート 1 冊の値段を求めよ”という問題を考える (以降、“問題 A”)。この問題では、“「A の数量」×「1 つあたりの A の数値」+「B の数量」×「1 つあたりの B の数値」=合計の数値”という抽象化された解法構造に対して、ノートの値段を「1 つあたりの A の数値」に当てはめ、それを未知数 x と置き、 $1 \times x + 40 \times 3 = 220$ という式を立てることで、式を整理し $x = 100$ という解を導出できる。しかし、これらの過程において解法構造を理解しないまま「220 から 120 を引く」という計算をしたという経験から具体的な数値や条件に依存して手続きを暗記してしまうと、数値や条件が変化した構造的に類似した問題に対して、獲得済みの知識を上手く活用できない場合がある。例えば、「ノート 2 冊と鉛筆 3 本で合計 260 円、鉛筆 1 本が 40 円の時、ノート 1 冊の値段を求めよ」という問題において、 $260 - 120 = 140$ と計算し、「A の数量」を意識できていないがために「ノート 1 冊は 140 円」と誤って導出してしまうことがある。

解法構造は、“数量分の数値の合計は「A の数量」

×「1つあたりのAの数値」で求められる」といった、他の問題で再利用できる解法の部分構造、すなわち部品[3]の集合から成り立っている。部品には、先にあげた抽象レベルの部品だけでなく、具体的な問題に適用された、例えば“ノートの合計の値段はノートの数量×ノート1冊あたりの値段で求められる”といった具体レベルの部品も含まれる。

これまで筆者らは、数学において部品の獲得と再利用する能力の支援システムについて研究してきた[4]。この研究では(1)問題文から得られる情報の関係性を構造化することによる「具体的な解法構造の理解」、(2)具体的な解法構造を分解することによる「具体的な部品の獲得」、(3)具体的な部品を抽象化することによる「部品の抽象化」、(4)さらに抽象化した部品を他の問題に当てはめることによる「部品の再利用」についての支援を指向してきた。しかし、

(1)には情報の分節化および関係の構造化の必要があり、その負荷が高すぎるあまり、(2)～(4)を十分に支援できないという課題があった。

そこで本稿では、あらかじめ学習者に対して「問題に含まれる情報」、「構造化された状態の問題」を提示することで情報の分節化および関係の構造化の負荷を低減し、部品の獲得・抽象化・再利用にフォーカスした構造的思考の支援手法およびシステムの設計および提案を行う。

2 関連研究

古池ら[3]は、プログラミング学習の分野において、ソースコードの構造理解を促すための学習手法を提案した。プログラム中に存在するソースコードの一部を“部品”として獲得し、学習者の知識として定着させるための手法である。また、学習者が獲得した部品を用いて、さらに大きな部品を構築する過程を“部品の段階的拡張手法”として定義した(図1)。

学習者は、部品の獲得・拡張を行った後で、それらの部品を別の問題で再利用する。学習者が部品の再利用を行う過程で、部品が再利用できる理由やどのような部品が再利用できるのかを思考することで、各部品に対する理解が深まることを期待している。

この手法では、解法を構成する小さな手続きのまとまりを「部品」として獲得し、それを組み合わせることで新たな問題へ活用する。この手法を数学学習に転用するためには、プログラミングとは異なる点について補完する必要がある。プログラミングにおいては、変数という抽象的な要素を用いてソースコードを組むことになる。そのため、異なる数値などにおいても、変数に代入する数値を変えることにより、同じ処理を呼び出すことができる。しかし、

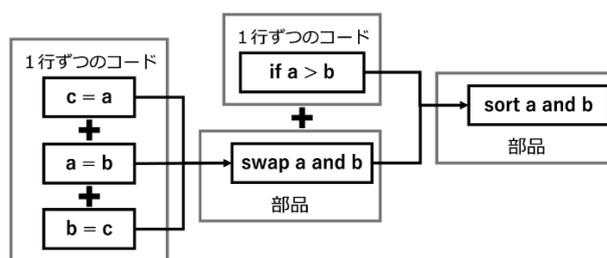


図1: 部品の段階的拡張手法

数学学習においては、具体的な数値や条件に固執した解法を構築することになる。例えば1章で述べた問題Aの場合、“120を引く”という具体的な手続きを含んでいるため、問題が異なった場合に用いることが困難になる。そのため、“定数項を移項して未知数を求める”のように具体的な手続きの内容を抽象的に捉えた上で理解しなければ、数値や条件が変わった問題に対して柔軟に対応することができない。そこで、部品の段階的拡張手法に「抽象化」の考え方を取り入れようと考えた。

このとき、数学的な抽象化を支える思考として重要なのが「構造的思考」である。Kieran[1]は、初等段階の代数学的思考を分析的思考・構造的思考・関数的思考の三次元からなる多次元の枠組みとして整理しており、そのうち構造的思考は、数や式、演算に内在する関係や性質を見出し、それを構造として捉え、表現し、活用する思考であると述べている。このような構造的思考は、数理的思考の基盤をなすものであり、数量的関係を構造的に捉え、それを一般的な原理として転用する能力に直結する。したがって、数学学習における抽象化とは、単に表面的な記号操作を一般化するのではなく、問題の背後にある数量的関係の構造を意識化し、それを新たな状況に適用する認知的過程として位置づけられる。

3 支援対象のモデリング

本研究では、学習者の数学的思考過程を「解法の導出過程」と「知識の獲得・修正過程」という2つの過程から構成されるものと捉える(図2)。前者の「解法の導出過程」では、学習者が問題文から得られる情報をもとに数量的関係を構造化し、具体的な解を導き出すことが求められる。この過程には、問題文から前提となる数値や条件を正確に読み取る「問題情報の取得スキル」、それらの関係を整理し、構造的に捉える「構造化スキル」、および構造に基づいて実際の答えを導く「演算・推論スキル」が含まれる。例えば1章で挙げた問題Aでは、学習者は「ノートの値段をx円とする」と仮定し、「 $x + 40 \times 3 =$

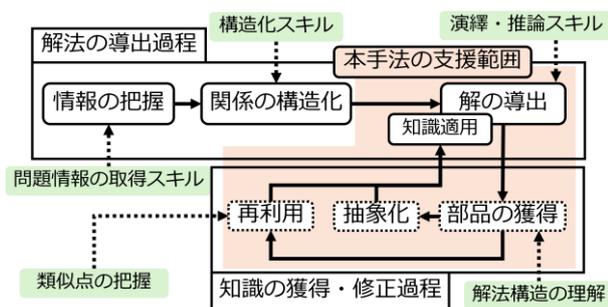


図 2: 本研究における支援対象のモデル

220」という関係を立式し、これを整理して $x = 100$ を求める必要がある。このとき、単に“ $220 - 120 = 100$ ”と計算するのではなく、“定数項を移項して未知数を孤立させる”という構造を理解していることが重要である。

一方の「知識の獲得・修正過程」は、導出した解法構造を分析し、その一部を知識のまとまり(部品)として獲得・抽象化し、他の問題へと転用できるようにする過程である。例えば上の例で得た「合計金額- (既知項の合計) = 未知項」という構造を、一般化して「 $A \times a + B \times b = C$ 」の形式として捉えられるようにすることが、この過程に相当する。この過程では、学習者が問題間に共通する構造を見出す抽象化能力、獲得した知識を他の状況に適用する再利用能力が求められる。

本研究では、これら2つの過程のうち、特に知識の獲得・修正過程を支援対象とする。すなわち、学習者が既知の解法構造を抽象化し、新しい問題に適用できるようになるまでの思考過程を支援することを目的とする。

4 提案手法

「知識の獲得・修正過程」では、学習者が既知の問題から得た解法構造を抽象化し、異なる条件の問題へと転用できるようになることが求められるが、従来の学習環境ではそのような構造的な理解を促す支援が十分ではなかった。

そこで本研究では、古池ら[3]による部品の段階的拡張手法を数学学習に応用し、学習者が問題解決の過程で得られる知識を「部品」として獲得し、それを段階的に抽象化・再利用することを通じて、構造的思考の形成を促す部品ベースの学習手法を提案する。本手法では、学習者が問題構造を把握しやすいように、「問題から得られる情報」と「関係が構造化された状態」をあらかじめ提示する。これにより、情報把握や構造化の個人差により解に到達できない学習者に対しても、構造的な解法の学習を可能とす

る環境を提供する。

本手法の学習の流れについて説明する。まず、学習者は与えられた構造化問題に対して、解法の一部を部品として獲得する。例えば問題Aの場合、“鉛筆1本の値段と本数から合計金額を求める”といった部分構造を、独立した知識のまとまり(部品X)として捉えることで獲得する。この段階において、学習者は問題全体の構造を完全に理解していなくても、部分的な対応関係を捉えることができるようになると思われる。

次に、学習者は獲得した部品をより一般的な構造へと抽象化する。例えば部品Xが“鉛筆”や“ノート”といった具体的な要素を含んでいる場合、それらを“対象Aの単価×個数=部分合計”という形式に一般化することで、他の問題にも適用可能な形に変換する。このとき、抽象化の段階を2つに分けて考える。部品に含まれる各要素の“object”に対する属性として「値の状態」、「計算の条件」の2つを考える。1つは、値の状態として“given”, “unknown”, “required”の3つが考えられる。given はあらかじめ問題から与えられている状態であり、unknown は未知数を表す。required は問題の中で最終的に導出することを表している。もう1つは、計算の条件としては“total”, “value”, “condition”の3つが考えられる。total は合計や全体量を表しており、value は各objectに当てはまる数値を表す。condition は制約や前提条件を表している。本手法では、学習者がどの部分を抽象化できるかを明示的に提示し(図3)、抽象化の思考過程を支援する。これにより、学習者は具体的な操作から一段高い構造的視点を獲得することができると考えられる。

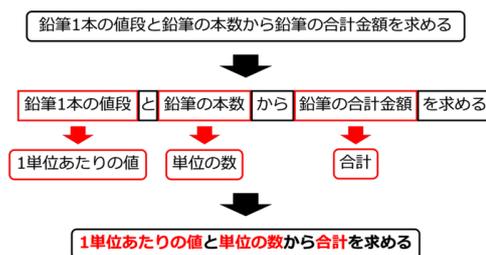


図 3: 部品 X を抽象化する過程

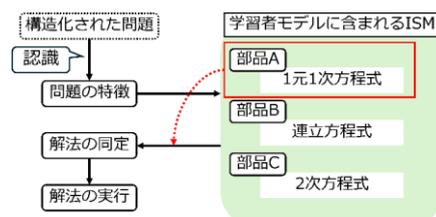


図 4: 問題の構造化から解法の実行まで

最後に、学習者は抽象化した部品を新しい問題で再利用する。このとき、学習者は与えられた問題の特徴を捉え、自身の学習者モデルに含まれる ISM との対応を照合することで、適用可能な解法を同定する (図 4)。例えば、“買い物の合計金額から未知の値段を求める問題”という具体的な状況を、“未知数が1つであり、1元1次方程式で解ける問題”という抽象的な枠組みに位置づけることで、過去に獲得した部品を再利用できるようになる。この再利用の過程を繰り返すことで、学習者は自らの知識構造を再構成し、より汎用的な構造的知識を形成していくことができると思われる。

5 提案するシステムの設計

本章では、前章で述べた提案する学習手法を実現するために設計した学習支援システムについて述べる。本システムは、学習者が問題の構造を把握し、部品の獲得・抽象化・再利用の一連の流れを体験的に進めるように設計されている。システムの基本画面構成を図 5 に示す。

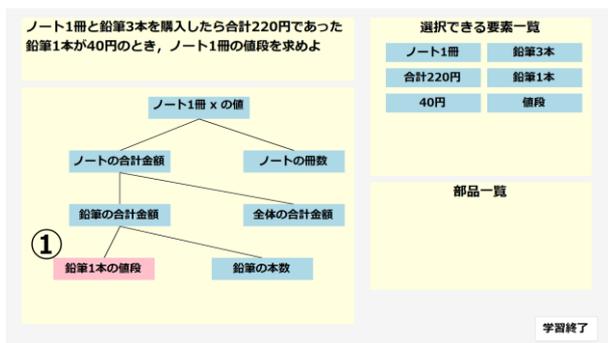


図 5: 問題文と情報提示画面

学習開始時には、画面左上に問題文、左下にその構造化表現が表示される。右上には、問題から得られる情報が要素一覧として提示され、学習者の情報取得能力に依存せず一律の情報を提供する。これにより、全ての学習者が同一の前提情報のもとで構造的思考に集中できるようにしている。

学習を開始した直後は、右下の「部品一覧」には何も表示されない。学習を進める中で、学習者が新たな構造を理解し、部品として獲得すると、その内容が部品一覧に保存・可視化されるようになる。システムは学習者モデルに含まれる ISM と部品データを紐づけて管理しており、未獲得の部品に関する知識は学習者がまだ理解していないものとして扱う。これにより、システムは学習者の理解状態に応じた支援を動的に行うことができる。

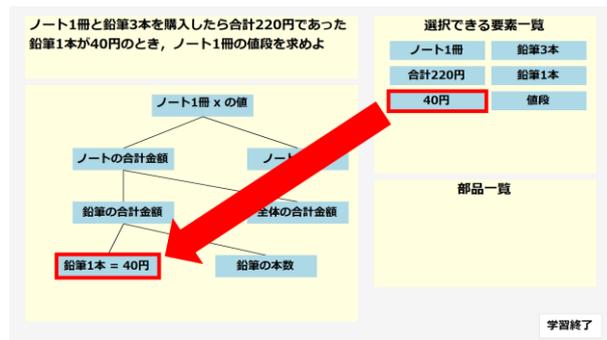


図 6: 構造に要素を代入する例

学習者は、構造化された問題中の一部を選択すると (図 5 の①)、該当箇所がハイライトされる。この状態で右上の要素一覧から情報を選択すると、図 6 のようにその要素が構造内に代入される。この操作を通して、学習者は問題に含まれる数量的関係を構造的に把握することができる。

次に、抽象化の支援について説明する。学習者が問題の構造に対して情報を当てはめる工程が終わると、部品として獲得できる構造の一部が画面上に表示される (図 7)。表示されている構造の各要素に対して、右上の「把握している情報」を選択する。把握している情報では、選択した要素が「与えられている情報」、「最終的に求める情報」、「わからない情報」



図 7: 部品の抽象化画面

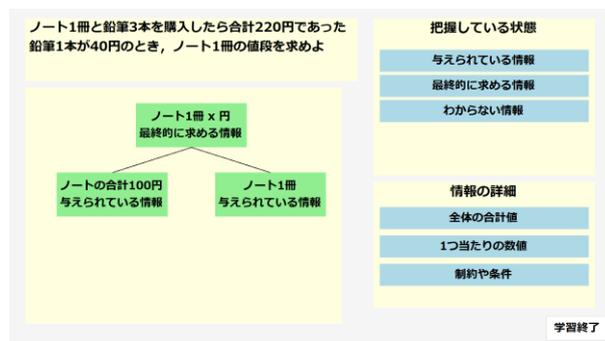


図 8: 把握している情報を選択した画面

報」の3つのどれに該当するかを選択する。図7の例では、“ノート1冊の値段”に対しては“最終的に求める情報”を選択する必要がある。また、“ノート1冊”に対しては“与えられている情報”を選択する必要がある。ここで学習者が選択した内容については、選択するたびに表示が変更され、図8のように色が変化する。

色が変わった要素に対しては右下の「情報の詳細」を選択する。情報の詳細では、選択した要素が「全体の合計値」、「1つ当たりの数値」、「制約や条件」のどれに該当するかを選択する。例えば、“ノート1冊 x円”や“ノート1冊”に対しては“1つ当たりの数値”を選択する。情報の詳細が選択された要素は、図9のように色が変わり、全ての要素に対して情報の詳細まで選択を終えたところで抽象化が終了する。

2問目以降では、学習者がすでに獲得した部品が部品一覧に表示され、必要に応じて再利用できる(図10)。例えば、「1つの未知数を1次方程式を用いて求める」といった部品を獲得していれば、学習者はそれを参照し、新しい問題の中で同様の構造を見つけて適用することができる。例として、図10では“ある動物園にタコとカメが10匹いる。タコが4匹の場合、カメの足は合計で何本になるか求めよ”という別の問題が提示されている。学習者は、1問目で獲得した部品を再利用する過程を踏まえて学習を進

める。このようにして、学習者は部品の再利用を通じて構造的知識を徐々に一般化していく。

6 おわりに

本稿では、学習者が問題を構造的に捉える能力と、その構造の一部を他の問題に再利用する能力の重要性について触れた。そして、特に構造の再利用に対する支援について検討した。今後は、本提案システムの開発を進め、その学習効果を十分に検証するための評価実験を実施することを目標としている。

評価実験実施後、実験結果を十分に分析し、その結果から得られる問題点などに対して考察すると同時に、深く議論する必要があると考えている。また、今後は問題の構造化能力の向上に対しての手法についても考えていきたい。

謝辞

本研究の一部は JSPS 科研費 JP25K21362 の助成による。

参考文献

- [1] C. Kieran: The multi-dimensionality of early algebraic thinking: background, overarching dimensions, and new directions, ZDM Mathematics Education, Vol. 54, No. 6, pp. 1131–1150, (2022)
- [2] 平嶋宗, 中村祐一, 池田満, 溝口理一郎, 豊田順一: ITS を指向した問題解決モデル MIPS, 人工知能学会誌, Vol. 7, No. 3, pp. 475-486, (1992)
- [3] 古池謙人, 東本崇仁, 堀口知也, 平嶋宗: プログラミングの構造理解を指向した部品の段階的拡張手法の提案と支援システムの開発・評価, 教育システム情報学会誌, Vol. 36, No. 3, pp. 190-202, (2019)
- [4] 内山裕太, 白髭虹輝, 古池謙人, 東本崇仁: 数学学習における解法の構造理解と再利用を可能とする学習手法の提案と学習支援システムの開発・評価, 教育システム情報学会特集論文研究会研究報告=JSiSE Research Report, 39, No. 6, pp. 91-98, (2025)



図 9: 抽象化を終えた画面

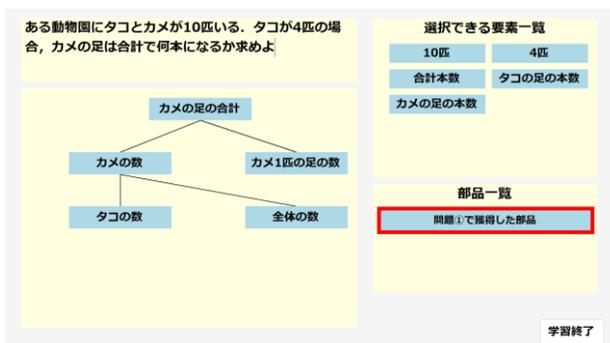


図 10: 2問目以降の部品を所持している画面